JGP - Vol. 7, n. 1, 1990

Propriétés de rigidité concernant la courbure des métriques indéfinies

GABRIEL PRIPOAE
Universitatea din Bucuresti
Facultatea de Matematica
Str. Academiei 14
70108 Bucuresu, Romania

Abstract. *A new rigidity theorem for the curvature of indefinite metrics is proved. We derive a pinching theorem for the Ricci curvature of 3-manifolds and we generalize a known characterisation of Einstein spaces in terms of a null convergence-like condition.*

1. INTRODUCTION

Il y a plus d'un siècle que F. Schur a démontré son célèbre théorème:

«Si une variété riemannienne de dimension $\geqslant 3$ a tous les points d'isotropie, alors elle est à courbure (sectionnelle) constante».

On se demande, avec G.B. Rizza [11] s'il est vraiment necessaire de considérer *tous* les points et dans chaque point *tous* les 2-plans.

Aprés une cascade de résultats dus à R.S. Kulkarni [8], S. Harris [5], L. Graves, M. Dajczer et K. Nomizu [2, 3, 4, 9], on est maintenant certain qu'en métrique indéfinie, il suffit de considérer seulement une partie des 2-plans. Deux des plus forts résultats connus sont les suivants:

1.THEOREME ([9]). *Soit (M, g) une variété sémi-riemannienne à métrique de signature $(-, \ldots, +, +, \ldots)$ et soit $p \in M$. On suppose que pour tout vecteur spatial $X \in T_pM$, il existe un nombre réel d tel qu'une des conditions suivantes*

Key-Words: indefinite metrics, sectional curvature, Ricci curvature, space forms, comparison theorems, null convergence condition.
1980 MSC: 53C50, 53B30, 53C80.

soit satisfaite:

(1) $k(\pi) \geqslant d$, *pour tout 2-plan non-dégénéré* $\pi \subset T_pM$, *contenant* X.

(2) $k(\pi) \leqslant d$, *pour tout 2-plan non-dégénéré* $\pi \subset T_pM$, *contenant* X.

(3) $|k(\pi)| \leqslant d$, *pour tout 2-plan spatial* $\pi \subset T_pM$, *contenant* X.

(4) $|k(\pi)| \leqslant d$, *pour tout 2-plan temporel* $\pi \subset T_pM$, *contenant* X.

Alors p est point d'isotropie. ■

2. THEOREME ([2]). *Soit* (M, g) *une variété sémi-riemannienne à métrique indéfinie et soit* $p \in M$. *Si pour tout 2-plan dégénéré* π *de* T_pM *et pour toute base* $\{X, Y\}$ *de* π, *on a*

$$g(R(X, Y)Y, X) = 0 \tag{5}$$

alors p est point d'isotropie. ■

Dans cette note on démontre une extension du théorème 2, en adaptant l'idée du théorème 1. Le principal résultat est le

3. THEOREME. *Soit* (M, g) *une variété à métrique de signature* $(-, \ldots, +, +, \ldots)$ *et soit* $p \in M$. *On suppose que pour tout vecteur spatial* $X \in T_pM$ *il existe un système lumineux (fini) de* $\{X\}^\perp$ *tel que (5) ait lieu, pour tout* Y *appartenant au système. Alors p est point d'isotropie.*

(Voir le §2 pour les définitions). Donc, pour un vecteur spatial X fixé, on ne considère plus une infinité de 2-plans comme dans (1) - (4), mais seulement un nombre fini. Ces derniers sont dégénérés, d'où la nécessité de remplacer la courbure sectionnelle $K(\pi)$ (qui n'a plus de sens) par l'hypothèse (5).

Dans le §3 on démontre un résultat de comparison concernant la courbure de Ricci des 3-variétés. On présente ensuite (§4) une conséquence physique du §2, en liaison avec la condition de convergence lumineuse (nulle) de la Relativité Générale.

2. LE RESULTAT PRINCIPAL ET DEUX SATELYTES

Soit (M, g) une variété sémi-riemannienne n-dimensionelle, à métrique indéfinie de signature ν, $(\underbrace{-, \ldots, -}_{\nu \text{ fois}}, +, \ldots, +)$ et $\nu \notin \{0, n\}$. Un vecteur $X \in T_pM$ s'appelle *spatial* (*temporel* resp. *lumineux*) si $g(X, X)$ est un nombre positif, negatif resp. nul. Un 2-plan $\pi \subset T_pM$ est *non-dégénéré, temporel* resp. *spatial* si la restriction de g à π est non-dégénérée, resp. indéfinie ou définie. La courbure sectionnelle d'un 2-plan non-dégénéré π est

$$K(\pi) := \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)\, g(Y, Y) - (g(X, Y))^2}$$

où $\{X, Y\}$ est une base de π. Un point $p \in M$ s'appelle *d'isotropie* si tous les 2-plans non-dégénérés de T_pM ont la même courbure sectionnelle.

Les résultats de cette section étant de nature algèbrique, on commence avec des notions d'algèbre linéaire.

1. DEFINITION. Soit V un espace vectoriel réel à n dimensions et $\langle\, ,\rangle$ un produit scalaire non-dégénéré et indéfini. Une famille $\mathcal{S}$ de vecteurs lumineux de V s'appelle *système lumineux pour* $\langle\, ,\rangle$ si pour toute forme bilinéaire symmetrique $f : V \times V \to \mathbb{R}$ telle que

(6) $$f(x, x) = 0, \qquad x \in \mathcal{S}$$

il existe une constante c telle que

$$f(x, y) = c\,\langle x, y\rangle, \qquad x, y \in V.$$

2. EXEMPLE. L'ensemble de tous les vecteurs lumineux de V, pour $\langle\, ,\rangle$ indéfini, forme un système lumineux (cf. au Lemme A,i de [9]). Ce système lumineux est infini. La proposition suivante nous assure qu'il y a des systèmes lumineux finis.

3. PROPOSITION. *Etant donné un espace vectoriel réel à n dimensions avec un produit scalaire non-dégénéré indéfini* $\langle\, ,\rangle$, *il existe un système lumineux de cardinal fini.*

Démonstration. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un répère orthonormal pour $\langle\, ,\rangle$. Donc $\langle e_i, e_j\rangle = \epsilon_i \cdot \delta_{ij}$; $\epsilon_i = -1$, $i = \overline{1, \nu}$; $\epsilon_i = +1$, $i = \overline{\nu + 1, n}$. Nous définissons $\mathcal{S}$ comme la réunion de tous les vecteurs suivants:

$$e_i \pm e_\alpha, \quad i = \overline{1, \nu}, \quad \alpha = \overline{\nu + 1, n};$$
$$e_i + e_j + e_{\nu+1}\sqrt{2}, \quad i, j = \overline{1, \nu}, \quad i \neq j \ \text{(quand } \nu \neq 1);$$
$$e_\alpha + e_\beta + e_1\sqrt{2}, \quad \alpha, \beta = \overline{\nu + 1, n}, \quad \alpha \neq \beta \ \text{(quand } \nu \neq n - 1).$$

On va montrer que $\mathcal{S}$ est un système lumineux pour $\langle\, ,\rangle$. Soit f une forme bilinéaire symmetrique sur V telle que $f(x, x) = 0, x \in \mathcal{S}$. Rapporté au rèpere $\{e_1, \ldots, e_n\}$, on a

$$f(x, y) = \sum_{a, b = 1}^{n} f_{ab} \cdot x^a \cdot y^b, \quad f_{ab} = f_{ba}.$$

En écrivant que $e_i + e_\alpha$ et $e_i - e_\alpha$ annullent f, on obtient

$$f_{i\alpha} = 0, \quad f_{ii} = -f_{\alpha\alpha} = c \ (= \text{const}),$$
$$i = \overline{1, \nu}, \alpha = \overline{\nu + 1, n}.$$

On choisit maintenant $f(e_i + e_j + \sqrt{2}\, e_{\nu+1}, e_i + e_j + \sqrt{2}\, e_{\nu+1}) = 0$, et on obtient

$$f_{ij} = 0, \quad i, j = \overline{1, \nu}, \quad i \neq j.$$

Par analogie, pour $e_\alpha + e_\beta + \sqrt{2} \cdot e_1$, il résulte $f_{\alpha\beta} = 0, \alpha, \beta = \overline{\nu + 1, n}, \alpha \neq \beta$. Donc $f = c \cdot \langle\ ,\ \rangle$. ■

4. *Remarque.* Les systèmes lumineux ne sont pas uniques. Le cardinal du système construit dans la proposition précedente est

$$2\nu(n - \nu) + C_\nu^2 + C_{n-\nu}^2$$

avec la convention $C_1^2 = 0$. Il serait intéressant de trouver le plus petit cardinal possible d'un système lumineux, qui dévrait – en tout cas – être supérieur à n.

5. *Démonstration du Théorème* 3 §1. (Le résultat principal). Conformement au théorème 1,a de [2], il suffit de démontrer que

$$g(R(X, Y)Z, X) = 0, \tag{7}$$

pour tous $X, Y, Z \in T_pM$, orthonormés, i.e.

$$|g(X, X)| = |g(Y, Y)| = |g(Z, Z)| = 1,$$
$$g(X, Y) = g(Y, Z) = g(Z, X) = 0.$$

Soit $X \in T_pM$ un vecteur spatial et unitaire. Alors $V := \{X\}^\perp$ est un espace vectoriel à produit scalaire indéfini. Sur V on définit la forme bilinéaire

$$f(Y, Z) = g(R(X, Y)Z, X).$$

Soit $\mathcal{S}$ un système lumineux pour V, tel que (5) a lieu. (D'aprés la proposition 3, on peut supposer que $\mathcal{S}$ est fini). Si $Z \in \mathcal{S}$, alors $sp\ \{X, Z\}$ est un 2-plan dégénéré et $f(Z, Z) = 0$. Par la définition de $\mathcal{S}$, il existe alors une constante c telle que $f = c \cdot g$, d'où on obtient aisément (7). ■

6. COROLLAIRE. *Soit (M, g) une variété sémi-riemannienne à métrique de signature $(-, \ldots, +, +, \ldots)$ ou $(-, -, \ldots, +, \ldots)$. Si pour tout point $p \in M$ et pout tout vecteur spatial (resp. temporel) $X \in T_pM$, il existe un système lumineux $\mathcal{S}$ dans $X^\perp$ tel que (5) a lieu, pour tout $Y \in \mathcal{S}$, alors (M, g) est à courbure*

constante. ∎

7. *Remarque.* (i) On ne peut pas espérer d'affaiblir les conditions (1) - (4), en considérant seulement un nombre fini de 2-plans avec les respectives propriétés.

(ii) Les théorèmes de comparison rencontrés jusqu'à présent (dont les théorèmes du §1) nécessitent des informations concernant *tous les points*. Pour certains espaces «réguliers» il est possible de considérer seulement un nombre fini de points. Le résultat suivant (presque évident mais que pourtant nous n'avons pas pu localiser dans la litterature) en donne un exemple.

8. PROPOSITION. *Soit (M, g) un espace sémi-riemannian, $\dim M \geqslant 3$, localement symmetrique (i.e. $\nabla R = 0$). S'il existe un point d'isotropie, alors (M, g) est à courbure constante.*

Démonstration. Dans un espace localement symmétrique, la courbure sectionnelle d'un 2-plan non-dégénéré est invariante par transport parallèle ([10], p. 220). Le point d'isotropie peut être uni avec n'importe quel autre point, par une courbe différentiable par morceaux (les variétés sont supposées implicitement connexes). Donc, tous les points sont d'isotropie. ∎

3. VARIETES DE LORENTZ EN DIMENSION 3

Les 3-variétés sont privilégiées du point de vue des structures sémi-riemannienes: elles admettent des métriques de toute signature. Modulo le changement du signe on peut toujours se restreindre au cas riemannien ($\nu = 0$) ou lorentzian ($\nu = 1$).

En géométrie riemanniene des 3-variétés est bien connu le théorème de Schouten et de Struik: «toute 3-variété d'Einstein est à courbure constante» ([7], p. 293). La démonstration reste valable, avec de mineurs changements, aussi dans le cas des 3-variétés de Lorentz.

Contrairement à ce qui se passe en géométrie riemanniene, en métrique indéfinie les théorèmes de «pinching» (concernant la courbure sectionnelle) sont superflues (on peut saisir le phénômène en regardant le théorème 1,(3) ou (4)). Dans ce qui suit, nous allons démontrer un résultat similaire, mais à propos de la courbure de Ricci.

1. PROPOSITION. *Soit (M, g) une 3-variété de Lorentz et $p \in M$. On suppose que pour tous $X, Y \in T_pM$ satisfaisant les conditions*

$$g(X, X) = 1, \quad g(Y, Y) = -1, \quad g(X, Y) = 0,$$

il existe un nombre positif d tel que

$$| Ric(X, X) + Ric(Y, Y) | \leqslant d.$$

Alors p est point d'isotropie.

Démonstration. Soit $X_1 \in T_pM$ un vecteur spatial unitaire et soit $\{X_1, X_2, X_3\}$ une base orthonormale de T_pM (on suppose X_2 temporel et X_2 spatial). On note par $\pi_{ij} := sp\,\{X_i, X_j\}$. On a

$$Ric(X_1, X_1) = K(\pi_{12}) + K(\pi_{13})$$
$$Ric(X_2, X_2) = -K(\pi_{12}) - K(\pi_{23})$$
$$Ric(X_3, X_3) = K(\pi_{13}) + K(\pi_{23})$$

d'où

$$2K(\pi_{12}) = Ric(Y \quad X_1) - Ric(X_2, X_2) - Ric(X_3, X_3) \leqslant Ric(X_1, X_1) + d$$

De la même façon

$$2K(\pi_{13}) \leqslant Ric(X_1, X_1) + d.$$

Le membre droit des inégalités est une constante (qui ne dépend que de X_1). Comme tout 2-plan non-dégénéré contenant X_1 est ou temporel ou spatial, il est de la forme $sp\{X_1, X_2\}$ ou $sp\{X_1, X_3\}$. On applique maintenant le théorème 1,(3) et (4) du § 1. ∎

2. COROLLAIRE. *Si une 3-variété de Lorentz a la courbure de Ricci bornée, alors elle est une variété d'Einstein (donc à courbure constante).*

Démonstration. La courbure de Ricci d'un vecteur non-null et non-lumineux v est $Ric(v, v)/g(v, v)$. On applique la proposition 1 et le théorème Schouten-Struik (la variante pour les métriques indéfinies). ∎

4. REMARQUES CONCERNANT LA CONDITION DE CONVERGENCE LUMINEUSE

1. THEOREME. *Soit (M, g) une variété sémi-riemanniene, dim $M \geqslant 3$, à métrique indéfinie. On suppose qu'en chaque point $p \in M$, il existe un système lumineux (fini) $\mathscr{S}_p$ tel que $Ric(v, v) = 0$, pour tout $v \in \mathscr{S}_p$.*

Alors (M, g) est un espace d'Einstein.

Démonstration. On applique la Proposition 3 du §2, dans chaque fibre T_pM. Il existe ainsi une fonction $f \in \mathscr{F}(M)$ telle que $Ric = f \cdot g$. Un résultat standard implique alors $f =$ const. ■

2. *Remarque.* (i) Le théorème précedent généralise un résultat de [3], qui faisait intervenir tous les vecteurs lumineux («$Ric(v, v) = 0$ pour tout v lumineux implique M espace d'Einstein»).

(ii) Si (M, g) est une variété de Lorentz, la condition

$$Ric(v, v) \geqslant 0$$

pour tout vecteur lumineux v, s'appelle la *condition de convergence lumineuse* ([6]). Notre condition $Ric(v, v) = 0$ est plus restrictive mais elle agit sur un nombre fini de vecteurs. Pour voir si un espace-temps est d'Einstein il suffit d'analyser, dans chaque point, un nombre fini (inférieur à $5n(n-1)/2$, cf. à la remarque 4, §2) de directions lumineuses. Y a-t-il des conditions «finies» (impliquant un nombre fini de points et de directions) pour décider si un espace-temps est d'Einstein? En ce qui concerne certains types de variétés, la reponse est affirmative (pour les espaces localement symmetriques, par exemple, voir la proposition 8, §2).

(iii) Si on note par T le tenseur énergie-moment d'un espace-temps (M, g), défini par $T = Ric - \lambda \cdot g$, ($\lambda$ une constante), on remarque que la condition $Ric(v, v) = 0$ pour tout $v \in \mathscr{S}_p$ est équivalente à la condition $T(v, v) = 0$, pour tout $v \in \mathscr{S}_p$. Cette équivalence n'a plus lieu entre «$Ric(v, v) \geqslant 0$» et «$T(v, v) \geqslant 0$» (*la condition de convergence faible*, voir [6]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BOMPIANI, *Uber das Theorem von F. Schur in der Riemannschen Geometrie*, Math. Z., 52 (1950).

[2] M. DAJCZER, K. NOMIZU, *On sectional curvature of indefinite metrics*, II, Math. Ann., 247 (1980), 279-282.

[3] M. DAJCZER, K. NOMIZU, *On the boundedness of Ricci curvature of an indefinite metric*, Bol. Soc. Brasil. Mat. 11 (1980), 25-30.

[4] L. GRAVES, K. NOMIZU, *On sectional curvature of indefinite metrics*, Math. Ann. 232 (1978), 267-272.

[5] G. HARRIS, *A Triangle Comparison Theorem for Lorentz Manifolds*, Indiana Math. J. 31 (1982), 289-308.

[6] S. HAWKING, G. ELLIS, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Univ. Press, 1973.

[7] S. KOBAYASHI K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, vol. I, 1963.

[8] K. NOMIZU, *Remarks on sectional curvature of an indefinite metric*, Proc. AMS, 89 (1983), 473-476.

[9] R. KULKARNI, *The value of sectional curvature in indefinite metrics,* Comm. Math. Helv., 54 (1979), 173-176.
[10] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry,* Acad. Press, 1983.
[11] G. RIZZA, *Schur-like Theorems,* Simp. Geom. An. Glob., Bucuresti, 1973, Ed. Acad. RSR, 1976, 135-138.
[12] F. SCHUR, *Uber den Zusammenhang der Raume,* Math. Ann., 27, 1886.

Manuscript received: August 23, 1989.